TD DE MODÈLE LINÉAIRE - FEUILLE 2

Exercice 1 Soit $X = (X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien tel que $\forall i \in \{1,2,3\}, \mathbb{E}X_i = 0, \mathbb{E}X_i^2 = 1$ et $\mathbb{E}(X_iX_j) = 1/2, i \neq j$. Écrire la fonction caractéristique de ce vecteur et chercher sa densité.

Exercice 2 Soient X un vecteur aléatoire de dimension p, C_1 et C_2 deux vecteurs aléatoires de dimension n et deux matrices A et B de dimension (n,p). Calculer $\mathbb{E}(AX + C_1)$, $\mathrm{Var}(AX + C_1)$ et $\mathrm{Cov}(AX + C_1, BX + C_2)$.

Exercice 3 Soit le vecteur aléatoire X de loi $\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\right)$. Trouver une matrice A de dimension (3,3) telle que AX soit un vecteur de composantes indépendantes.

Exercice 4 (**!**) Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On pose

$$Y_i = X_i - X_1,\ 2 \leq i \leq n,$$

$$\overline{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \text{et} \qquad S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2.$$

1. Quelle est la loi de $(Y_2, \ldots, Y_n)$?
2. Montrer que $(Y_2, \ldots, Y_n)$ est indépendant de $\overline{X}_n$. En déduire que $\overline{X}_n$ et S^2 sont indépendants.
   Remarque : nous l'avons utilisé dans le cours ! Dónde ?

Exercice 5 Soit (X,Y) un vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^2$, dont la loi admet la densité

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Dterminer les lois de X, Y, $X+Y$, X^2+Y^2.

Rappel : $\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2}du = \sqrt{2\pi}$ (on le retrouve facilement en utilisant la densit d'une normale unidimensionnelle centre rduite dont l'intgrale fait 1).